第9卷 第2期 中国病毒学 Vol. 9 No. 2
1994年6月 VIROLOGICA SINICA Jun. 1994

正廿面体病毒的轴长、三角形剖分数和壳粒间距之间关系的研究

王继科
(中国农业科学院哈尔滨兽医研究所，哈尔滨 150001)

A **提要** 本文根据正廿面体病毒具有5∶3∶2旋转对称轴特性，分别计算出各条对称轴的轴长，并相应推导出 $a_5/\sqrt{T}\,l=1.9022$，$a_3/\sqrt{T}\,l=1.5116$ 和 $a_2/\sqrt{T}\,l=1.6180$。这里 a_5，a_3 和 a_2 分别是5-，3-和2-重轴的长度，l 是任意两相邻壳粒间的距离，T 是三角形剖分数。同时对已报道过的 $r/\sqrt{T}\,l=0.83$，又采用新的方法给予推导和验证，这里 r 是病毒等效球的平均半径(r)。通过上述公式深入地揭示了病毒的大小、轴长与三角形剖分数和壳粒间距之间的关系。

关键词 正廿面体，三角形剖分数，等效球的半径，壳粒 病毒

有关正廿面体病毒的大小与三角形剖分数间的关系在 Casjens(1985)所著的《病毒结构与组装》一书中已有描述，即 $dT^{-1/2}$ 近似于一个常数，并列举了许多作者提供的各种病毒的数据[1]。为此，笔者开始对这一常数的研究，于1990年首次报道了正廿面体病毒的等效球半径(r)与三角形剖分数(T)和壳粒间距(l)之间的关系等于一个常数，即 $r/\sqrt{T}\,l=0.83$[2]。这一公式是根据正廿面体表面积与等效球的表面积相等的情况下确定的。

本文除对公式 $r/\sqrt{T}\,l=0.83$ 从另外角度给予新的推导和验证外，还进一步计算出5-，3-和2-重轴的轴长，并推导出 $a_5/\sqrt{T}\,l=1.9022$，$a_3/\sqrt{T}\,l=1.5116$ 和 $a_2/\sqrt{T}\,l=1.6180$，更深入地阐明了旋转轴与三角形剖分数和病毒表面特定位置壳粒的关系。通过上述公式，从病毒的内部将廿面体病毒的轴长同衣壳结构参数间的关系联系起来。

结　果

1　5-，3-和2-重轴与三角形剖分数和壳粒间的关系

在正廿面体病毒表面上，每个大三角形面可以剖分成若干个小的等边三角形，这种由大三角形所划分成的若干个小的三角形面数称为三角形剖分数(T)，T 可以由下式给出：

$$T=L^2/l^2 \tag{1}$$

这里，L 是廿面体表面大三角形(基本三角形)的边长，l 是所划分出的小三角形(单位三角形)的边长，即任意两相邻壳粒间的距离。将(1)式变换后，得

$$L=\sqrt{T}\,l \tag{2}$$

* 本文于1993年2月15日收到，10月29日修回

意指 L 是 l 的 $\sqrt{T}$ 倍。

正廿面体是一种伯拉图体(Platonic solids)廿面体病毒的结构由 20 个等边三角形面、12 个顶点和 30 条边组成，并包含有 5-，3-和 2-重旋转对称轴，其轴数分别为 6∶10∶15。因此，廿面体又叫 5∶3∶2 旋转对称实体。正因如此，正廿面体病毒的衣壳结构可以采用参数进行表述。

1.1　2-重轴长度　众所周知廿面体表面有 20 个等边三角形，每个三角形的边长为 L，则三角形的高就等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}L$，如果我们沿 5-，3-，和 2-重轴把病毒切开；那么就会产生像图 1 所示的平面图，即"⬡"状。

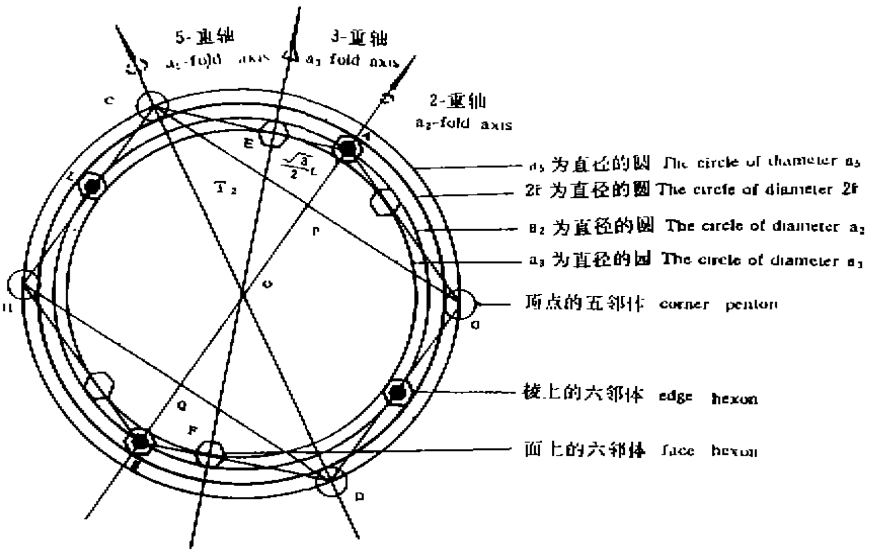

图 1　从 5-，3-，和 2-重轴切开的正廿面体病毒剖面，
显示了病毒的大小(即半径 $\bar{r}$)与等效园球的关系及其有关轴长：
$a_5=1.9022L$，$\bar{r}=0.83L$，$a_2=1.6180L$，$a_3=1.5116L$。

Fig. 1　Schemotic presentation of viral crose setion which is cut out from a_5-，a_3-，and a_2-fold axes and represents the correlation of viral size with equivalent sphere.

从图 1 中知道：$CH=DG=L$，$AC=AG=BH=BD=\frac{\sqrt{3}}{2}L$，设 2-重轴长度为 $a_2=2r_2$(r_2 是半径)。那么，$OA=CP=r_2$，$AP=OA-OP=r_2-\frac{L}{2}$，因为 ΔAPC 是直角三角形，所以有：

$$(AC)^2=(AP)^2+(CP)^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)^2=r_2^2+(r_2-\frac{L}{2})^2$$

$$2r_2^2-Lr_2-\frac{1}{2}L^2=0 \tag{3}$$

解方程(3)得

$$r_2=\frac{1+\sqrt{5}}{4}L \quad 和\ r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{4}L\ (不合理舍掉)$$

所以,2-重轴的轴长

$$a_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}L \qquad (\doteq 1.6180L) \tag{4}$$

1.2 5-重轴长度

在直角 △CDG 中,$CG=a_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}L, DG=L$

因此有$(CD)^2=(CG)^2+(DG)^2$,设 5-重轴长度为 a_5 则有:

$$a_5^2=L^2+(\frac{1+\sqrt{5}}{2}L)^2$$

$$a_5^2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}L^2$$

$$a_5=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}L \qquad (\doteq 1.9022L) \tag{5}$$

1.3 3-重轴长度

∵E 点是廿面体表面上等边三角形的重心 ∴$AE=\frac{\sqrt{3}}{6}L$,已知 $OA=\frac{a_2}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}L$,在直角 △AEO 中则有:

$$(OA)^2=(AE)^2+(OE)^2$$

$$(OE)^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}L\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}L\right)^2$$

$$OE=\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{24}}L$$

如果 3-重轴长以 a_3 表示,那么 $a_3=2\times OE$

$$a_3=\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}L \qquad (\doteq 1.5116L) \tag{6}$$

如果以上述计算出的 5-,3-,和 2-重对称轴的长度为直径作圆,就会画出如图 1 所示的三个同心圆(细线所示)。再将(2)式分别代入(5),(4)和(6)式得

$$a_5/\sqrt{T}\ l=1.9022 \tag{7}$$

$$a_2/\sqrt{T}\ l=1.6180 \tag{8}$$

$$a_3/\sqrt{T}\ l=1.5116 \tag{9}$$

这里,a_5 是正廿面体病毒相对两个顶点处五邻体的距离,廿面体病毒共有 12 个五邻体;a_2 是两条对应边上的六邻体间的垂直距离共有 15 条对应边;a_3 为两个对应三角形面上六邻体间的垂直距离,共有 10 个对应面。

2 病毒的等效球半径($\bar{r}$)与 T 和 l 之间的关系

2.1 最大截面周长(P_{max})及其等效球半径的计算

所谓最大截面周长是指廿面体沿 5-，3-，和 2-重轴切开而形成的“”状剖面所具有的周长（见图 1）。

$$P_{max}=AC+\cdots\cdots+GA$$
$$=2L+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}L$$
$$=(2+2\sqrt{3})L \tag{10}$$

根据周长相等，计算得到其等效球半径（r_{max}）为

$$r_{max}=P_{max}/2\pi$$
$$=(1+\sqrt{3})L/\pi \qquad (\doteq 0.8696L) \tag{11}$$

2.2　最小截面周长（P_{min}）及其等效球半径的计算

最小截面周长是指沿病毒表面等边三角形高的$\frac{1}{2}$处切开，形成一个正 10 边形的剖面（如图 2 所示），因此其周长为

$$P_{min}=10\times\frac{L}{2}=5L \tag{12}$$

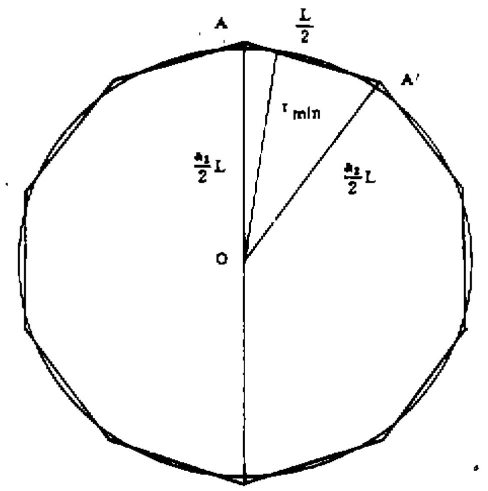

图 2　病毒最小截面周长（P_{min}）和它的等效球半径 r_{min}

Fig. 2　The manimum perimeter P_{min} of viral cross section and its equivalent sphere radius r_{min}

同理，r_{min}为

$$r_{min}=P_{min}/2\pi=\frac{5}{2}L \qquad (\doteq 0.7958L) \tag{13}$$

2.3 平均截面周长（$\bar{P}$）及其等效球半径（$\bar{r}$）的计算

平均截面周长是 P_{max}和 P_{min}之和的平均，即

$$\overline{P}=\frac{1}{2}(P_{max}+P_{min})=\frac{1}{2}\times[(2+2\sqrt{3})L+5L]=\frac{7+2\sqrt{3}}{2}L \qquad (14)$$

其等效球半径 $\bar{r}$ 为

$$\bar{r}=\overline{P}/2\pi=\frac{7+2\sqrt{3}}{4\pi}L \qquad (\doteq 0.8328L) \qquad (15)$$

将(2)式代入(15)式得

$$\bar{r}/\sqrt{T}\,l=0.83 \qquad (16)$$

这一结果同以前曾报道过的结果是一致的，同样我们以 $\bar{r}$ 即 $0.83L$ 为半径作图(如图1粗线所示)。我们就会发现 $a_5>2\bar{r}>a_2>a_3$，这里以 $\bar{r}$ 为半径所形成的等效园球，刚好座落在正廿面体病毒的30条棱上。

讨　论

公式(7)(8)和(9)都是根据轴长推导出来的，因此在应用公式求 T 值时，都具有一定的局限性。(7)式只适用于病毒廿面体顶点处五邻体的情况；(8)式只适合于棱上六邻体壳粒的情况；(9)式只适合于三角形面上六邻体壳粒的情况。对于棱上或面上的中心位置的壳粒来说，有些病毒可能还是空位。因此在测量时，要找出对应两壳粒间的垂直距离或者直接测量两相对棱之间或两相对面与面之间的垂直距离，进而确定其轴长，求出 T 值。对于公式(16)来说，$\bar{r}$ 代表病毒粒子的等效球的平均半径，是全方位内外半径的总和的平均值，因此，具有普遍性，从理论上揭示了 $\bar{r}$ 与 T 和 l 之间的关系等于一个常数 0.83。就上述几个求 T 公式比较而言，比较精确的还是采用(7)式更方便。

从图1中可以看出：$a_5>2\bar{r}>a_2>a_3$，这里 a_5 是衣壳的外接园的直径；a_3 所形成的园球内切于廿面体表面三角形的重心；a_2 所形成的圆球则内切于廿面体三角形的棱；唯独 $\bar{r}$ 为半径的圆球、恰好座落在廿面体的30条棱上。这里 $2\bar{r}$ 为直径不同一般所说的病毒粒子直径(D)，一般所说直径 D 是指用两个平行平面或卡尺去量病毒颗粒的外径，再把各方向的外径加以平均，$D=2r_{max}(\doteq 1.74L)$[3]，而 $2\bar{r}$ 则是指内、外测径器(CaLiper)的平均值

因为 $\bar{r}/\sqrt{T}\,l=0.83$ 公式是在正廿面体表面积与它的等效园球面积相等的情况下推导出来的，所以圆球的表面积刚好被病毒的壳粒所布满，就此面言 $\bar{r}/\sqrt{T}\,l=0.83$ 公式也是成立的。

通过上述公式，我们不仅可以计算出 T 值，而且进一步还可以求出级数(P)、壳粒数(C)……等一系列正廿面体病毒的结构参数。从而根据 Caspar-Klug 几何学原理[4]，我们可以对病毒的拓扑学表面作出初步的鉴定。同时，这些病毒结构参数的研究也为病毒结构分类提供了新的方法，我们已经应用在动物病毒的结构分类上[5]。

参考文献

1 Casjens S. Virus Structure and Assembly. Jone and Bartlett Publishers. Inc. Boston Portola Valley. 1985;30—65

2 王继科. 新推导出的两个计算正二十面体病毒T值的公式及其应用. 中国科学(B辑), 1990;8:847—854

3 郑富盛著. 细胞形态立体计量学. 第一版. 北京:北京医科大学, 中国协和医科大学联合出版社. 1990;45—84

4 Martin S J. The Biochemistry of Viruses, Cambridge University Press, London, New York, Melbeurne, 1978; 47—52

5 王继科. 动物病毒的结构分类. 病毒学报, 1990; 6(4), 335—340

The Correlation among Viral Axes, Triangulation Number and Capsomeres

Wang Jike

(*Harbin Veterinary Research Institute, Chinese Academy of Agricultura Sciences, Harbin* 150001)

This paper calculates the length of the 5-, 3-, and 2-fold rotational symmetry axes and the derives formulas from them, they are $\frac{a_5}{\sqrt{T}\,l} = 1.9022$, $\frac{a_3}{\sqrt{T}\,l} = 1.5116$ and $\frac{a_2}{\sqrt{T}\,l} = 1.618$, where a_5, a_3, and a_2 are the length of the 5-, 3-, and 2-fold axes respectively, l is the distance between any two adja cent capsomeres, T is triangulation number. The formula of the $\frac{r}{\sqrt{T}\,l} = 0.83$ that we have reported is derived by the new method. These formulas connect T, a_5, a_3, a_2, r and l.

Key words Icosahedron, Triangulation number, Radius of equivalent sphere, Capsomeres